



CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIEN ÉCONOMISTE

ISE Option Mathématiques

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés.

- I. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et (e_1, e_2) une base de E . Soit b une forme bilinéaire symétrique sur E dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Montrer que b est définie positive si et seulement si $\{\alpha > 0 \text{ et } \alpha\gamma - \beta^2 > 0\}$.
On rappelle que b est définie positive si et seulement si elle définit un produit scalaire c'est à dire si $\forall u \in E - \{0\}$, $b(u, u) > 0$ ou si et seulement si

$$\forall X \in M_{2,1}(\mathbb{R}) - \{0\}, \quad {}^tXAX > 0.$$

tX désigne la transposée de X .

- II. On considère désormais l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 et la forme bilinéaire symétrique

$$B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$B((x, y, z); (x', y', z')) = xx' + yy' - zz'.$$

Soit α un paramètre réel. On considère le plan P_α engendré par les vecteurs $u_\alpha = (1, 0, \alpha)$ et $v_\alpha = (0, 1, \alpha)$:

$$P_\alpha = \{\lambda u_\alpha + \mu v_\alpha, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Donner une équation cartésienne du plan P_α .

On considère maintenant la restriction de B au plan P_α que l'on appelle b_α : si $U, V \in P_\alpha$, on a donc $b_\alpha(U, V) = B(U, V)$.



2. A quelle condition sur le paramètre α , la forme bilinéaire symétrique b_α est elle définie positive?
3. Dans ce cas, grâce au procédé de Gram-Schmidt, donner une base orthonormale de l'espace euclidien (P_α, b_α) .
4. Ecrire la relation que doit vérifier la matrice A dans la base canonique d'une forme linéaire f sur \mathbb{R}^3 telle que

$$B(f(x, y, z), f(x', y', z')) = B((x, y, z), (x', y', z'))$$

pour tout $(x, y, z); (x', y', z')$.

III. On suppose maintenant E (de dimension deux) muni d'un produit scalaire, que l'on notera, pour deux vecteurs $u, v \in E : \langle u, v \rangle$. Soit f un endomorphisme autoadjoint de E , on définit alors une forme quadratique $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $q(u) = \langle f(u), u \rangle$.

1. Montrer que q change de signe sur E (à savoir qu'il existe $u, v \in E$ tels que $q(u)q(v) < 0$) si et seulement si $\det f < 0$.
2. Montrer que q ne change pas de signe sur E si et seulement si l'ensemble $Z_q = \{x \in E, q(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E .
3. Si q ne change pas de signe sur E , discuter alors en fonction de la dimension de Z_q le rang de f .
4. Peut-on généraliser la question 1. au sens suivant : Sur un espace F de dimension $n > 2$, a-t-on
" q change de signe si et seulement si $\det f < 0$ " ?

IV. On considère ici l'espace

$$F = \{A \in M_2(\mathbb{R}), \text{Tr } A = 0\}$$

$\text{Tr } A$ désigne la trace de la matrice A .

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et vérifier que

$$\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

en est une base.

2. Montrer que si on définit $\langle A, B \rangle = \text{Tr } {}^tAB$, alors $(M_2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.
3. Si $A \in M_2(\mathbb{R})$ exprimer le projeté orthogonal de A sur F .
4. Trouver une base orthonormée (f_1, f_2, f_3) de $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en orthonormalisant la base (e_1, e_2, e_3) .



5. L'application $A \rightarrow \det(A)$ est une forme quadratique sur F , montrer qu'il existe un unique endomorphisme autoadjoint u de E tel que

$$\forall A \in E, \det(A) = \langle u(A), A \rangle$$

6. Déterminer la matrice de u dans la base (f_1, f_2, f_3) et déterminer les valeurs propres de u et la signature de la forme quadratique $A \in F \rightarrow \det(A)$.

V. On considère $G = M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si on définit pour $A \in G$, $q(A) = \text{Tr } A^2$, alors q est une forme quadratique sur E . Quelle est la forme bilinéaire associée?
2. Montrer que si A est symétrique et B est antisymétrique alors

$$\text{Tr } AB = 0$$

3. Déterminer l'orthogonal de l'ensemble des matrices symétriques pour la forme q .
4. Déterminer la signature de q pour $n = 2$.