ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA - ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA - YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE - SÉNÉGAL

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice

Soit A dans l'ensemble $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre 3 à éléments complexes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
2. Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.
3. Calculer A^9.

Problème

I. *Polynômes d'interpolation de Lagrange*

Soient $x_0, ..., x_n$ des réels distincts et $f_0, ..., f_n$ des éléments de $\mathbb{R}$. Soient les polynômes à coefficients réels

$$L_k(x) = \frac{\Pi_{j=0, j\neq k}^n (x - x_j)}{\Pi_{j=0, j\neq k}^n (x_k - x_j)}, \quad k = 0, ..., n,\ x \in \mathbb{R},$$

et

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_k(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer $L_k(x_\ell)$ pour toutes les valeurs de k et ℓ dans $\{0, ..., n\}$.
2. Calculer $L(x_\ell)$ pour tout ℓ dans $\{0, ..., n\}$. Quel est le degré maximal du polynôme $L(x)$?
3. Montrer que $L(x)$ est l'unique polynôme ayant les propriétés de la question 2.
   Il s'agit du *polynôme d'interpolation de Lagrange*.

II. *Intégration numérique*

Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On appelle *procédé d'intégration numérique* associé aux points $x_0, ..., x_n$ de $[a, b]$ et aux poids $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ l'application

$$f \mapsto I(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

On veut étudier la qualité de l'approximation de $\int_a^b f(x)dx$ par $I(f)$ en la caractérisant par l'erreur d'approximation

$$E(f) = I(f) - \int_a^b f(x)dx.$$

1. On suppose que le procédé I est exact sur les polynômes de degré au plus n, c'est-à-dire que

   $$E(P) = 0,$$

   pour tout polynôme P à coefficients réels, de degré au plus n.

   Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{(n+1)}$.

   a) Ecrire le développement de Taylor à l'ordre n de $f(x)$ en a, avec reste intégral.
   Montrer que le reste intégral peut s'écrire sour la forme

   $$\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)G_t(x)dt, \text{ avec } G_t(x) = (x-t)_+^n = \max\{0, (x-t)^n\}.$$

   b) Montrer que

   $$E(f) = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)K_n(t)dt,$$

   avec $K_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, dit *noyau de Peano*, donné par

   $$K_n(t) = E(G_t).$$

   c) En déduire une majoration simple de $E(f)$ en fonction de la norme uniforme de $f^{(n+1)}$: $\sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$.

   d) Si $g(x) = x^{n+1}$, appliquer les questions précédentes pour calculer $E(g)$ en fonction de K_n.
   On suppose K_n de signe constant. Exprimer la majoration précédente de $E(f)$ en fonction de $E(g)$.

2. On veut décrire des procédés d'intégration numérique aux cas où les points d'interpolation sont également répartis sur $[a,b]$: $x_k = a + (b-a)\cdot k/n$, $k \in \{0, ..., n\}$.

   a) Trouver les constantes $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, ..., n$ telles que le procédé

   $$f \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

   est exact pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n. On pourra utiliser le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, ..., x_n$ (c'est-à-dire $f_0 = f(x_0)$, ..., $f_n = f(x_n)$). (Ne pas chercher une forme explicite de ces coefficients).
   Montrer l'unicité de ces coefficients.

   b) Calculer le noyau de Peano pour $n = 1$.
   En déduire un procédé d'intégration numérique et l'erreur d'approximation associée si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$.

III. *Méthode de Gauss*

Soit $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de degré n orthonormés sur $[a,b]$:

$$\int_a^b P_n(u)P_m(u)\,du = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que P_{n+1} et S sont orthogonaux, pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à n.
2. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et notons $u_0, ..., u_n$ les zéros de P_{n+1} : $P_{n+1}(u) = \gamma_{n+1}(u-u_0)...(u-u_n)$, avec $\gamma_{n+1} \in \mathbb{R}$.
   Soit Q un polynôme de degré $2n+1$.

   a) Ecrire le polynôme L d'interpolation de Lagrange de Q aux points $u_0, ..., u_n$.

   b) Montrer que le polynôme $Q - L$ est divisible par P_{n+1}. En déduire qu'il existe des réels $\lambda_0, ..., \lambda_n$ tels que

   $$\int_a^b Q(u)du = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q(u_k).$$

   c) Démontrer que $\lambda_k > 0$, pour tout k de 0 à n.